AULA

Sistema de E.D.O. lineares de primeira ordem 13

META:

Descrever a teoria preliminar sobre sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Reconhecer um sistema de equações lineares de primeira ordem.

Transformar uma equação diferencial de ordem superior em um sistema de equações de primeira ordem.

Identificar uma solução geral de um sistema de equações lineares de primeira ordem.

Verificar as hipóteses do teorema de existência e unicidade.

PRÉ-REQUISITOS

Resolução de sistemas lineares. Além dos conhecimentos das aulas 1, 2, 6, 7 e 8.

13.1 Introdução

Caros alunos, nesta aula começaremos a estudar nosso último conteúdo, abordaremos os fundamentos teóricos acerca dos sistemas de equações lineares de primeira ordem. Veremos que os resultados abordados aqui nada mais são do que uma generalização dos resultados vistos na aula 6.

13.2 Sistema de equações lineares de primeira ordem: Fundamentos teóricos

Definição 13.1. Uma E.D.O. da forma

$$Y' = A(x)Y + B(x),$$

onde $Y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e x é a variável independente real é dita **sistema de equações diferenciais ordinárias linear de primeira ordem**. Quando $B(x) \equiv 0$ o sistema acima se reduz a

$$Y' = A(x)Y.$$

Este sistema reduzido é conhecido por **sistema de equações diferenciais ordinárias lineares homogêneo de primeira ordem.** Caso contrário, o sistema é dito não homogêneo.

Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias linear não homogêneo na sua forma vetorial

$$Y' = A(x)Y + B(x). \tag{13.69}$$

Além da forma vetorial, podemos escrever o sistema (13.69) na sua

forma matricial, dada por

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$$

ou na forma

$$\begin{array}{rcl} y_1' & = & a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ y_2' & = & a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n' & = & a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x). \end{array}$$

Exemplo 13.1. Uma E.D.O. linear de ordem n

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots a_0(x)y = g(x),$$

onde $a_n(x) \neq 0$ pode ser vista como um sistema de equações de primeira ordem. De fato, primeiramente, escrevamos a E.D.O. acima na forma

$$y^{(n)} = \frac{1}{a_n(x)}[-a_{n-1}(x)y^{(n-1)} - \cdots - a_0(x)y + g(x)]$$

Chame $y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'', \cdots, y_n = y^{(n-1)}$. Assim,

$$\begin{array}{rcl} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n-1}' & = & y_n \\ y_n' & = & \frac{1}{a_n(x)}[-a_{n-1}(x)y^{(n-1)} - \cdots - a_0(x)y + g(x)]. \end{array}$$

Matricialmente, o sistema acima tem a forma

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \\ -\frac{a_0(x)}{a_n(x)} & -\frac{a_1(x)}{a_n(x)} & \cdots & -\frac{a_{n-2}(x)}{a_n(x)} & -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix}.$$

E, vetorialmente, é dado por

$$Y' = A(x)Y + B(x),$$

onde $Y = (y_1 \cdots y_n)^T, A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \\ -\frac{a_0(x)}{a_n(x)} & -\frac{a_1(x)}{a_n(x)} & \cdots & -\frac{a_{n-2}(x)}{a_n(x)} & -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix}$
e $B(x) = (0 \cdots 0\, g(x))^T$.

Observação 13.1. 1) A notação usada acima $B = ()^T$, se refere a matriz transposta.
2) Observe que uma E.D.O. pode ser vista como um sistema unidimensional, ou seja, a matriz $A(x)$ é uma matriz de ordem 1×1.
3)Uma das grandes utilidades de se trabalhar com sistemas está na redução da ordem das equações a serem estudadas. De fato, no exemplo acima vimos que uma E.D.O. de ordem n pode ser estudada como um sistema de equações de ordem um, o que facilita muito sua análise e aumenta o número de equações que podem ser analisadas analiticamente.

Mãos a obra

Escreva a seguinte equação diferencial

$$y''' + ln(x)y'' + 3xy = x^2, x \in (0, \infty)$$

em forma de sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

Definição 13.2. Um vetor solução do sistema (13.69) num intervalo I é qualquer matriz coluna

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_{n-1}(x) \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

cujos elementos são funções diferenciáveis que satisfazem o sistema (13.69).

Exemplo 13.2. Verifique que

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^{-2x} \\ -e^{-2x} \end{pmatrix} \quad e \quad \overline{Y}(x) = \begin{pmatrix} 3e^{6x} \\ 5e^{6x} \end{pmatrix}$$

são soluções do sistema

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} Y.$$

Pela definição, para provarmos que Y e $\overline{Y}$ são soluções do sistema dado, basta-nos verificarmos se ele satisfaz o sistema.

Observe que

$$Y' = \begin{pmatrix} -2e^{-2x} \\ 2e^{2x} \end{pmatrix} \quad e \quad \overline{Y}' = \begin{pmatrix} 18e^{6x} \\ 30e^{6x} \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} -2e^{-2x} \\ 2e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2x} \\ -e^{-2x} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 18e^{6x} \\ 30e^{6x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3e^{6x} \\ 5e^{6x} \end{pmatrix}.$$

O problema

$$Y' = A(x)Y + B(x),\ Y(x_0) = Y_0,$$

onde $x \in I, Y \in \mathbb{R}^n$ e $Y_0 = (\gamma_1 \cdots \gamma_n)^T$ é uma matriz constante, é dito P.V.I..
Analogamente a equações diferenciais de ordem superior, sistema de equações de primeira ordem também possui um teorema de existência e unicidade, o qual enunciamos a seguir.

Teorema 13.1. *(***Existência e Unicidade***) Suponhamos que os elementos das matrizes $A(x)$ e $B(x)$ sejam funções contínuas num intervalo comum I que contenha x_0. Então, existe uma única solução para o P.V.I.*

$$Y' = A(x)Y + B(x),\ Y(x_0) = Y_0,$$

no intervalo I.

A seguir enunciaremos uma série de resultados análogos aos resultados vistos na aula 6 para equações lineares de ordem superior. Esses resultados são fundamentais para nosso embasamento teórico sobre resolução de sistemas de equações lineares de primeira ordem.

Teorema 13.2. *(***Princípio da superposição***)Seja $Y_1, \cdots, Y_k$ um conjunto de vetores solução do sistema de ordem n homogêneo*

$$Y' = A(x)Y \tag{13.70}$$

no intervalo I. Então, a combinação linear

$$Y = c_1Y_1 + \cdots c_nY_n$$

também é solução de (13.70) em I.

Teorema 13.3. *Sejam* $Y_1(x) = (y_{11}(x)\ y_{21}(x)\ \cdots\ y_{n1}(x))^T, Y_2(x) = (y_{12}(x)\ y_{22}(x)\ \cdots\ y_{n2}(x))^T, \cdots, Y_n(x) = (y_{1n}(x)\ y_{2n}(x)\ \cdots\ y_{nn}(x))^T$, *$n$ vetores solução do sistema homogêneo (13.70) no intervalo I. Então, o conjunto de vetores solução será L.I. em I se, e somente se, o Wronskiano*

$$W(Y_1, \cdots, Y_n) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \cdots & y_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

para todo $x \in I$.

Observação 13.2. Na verdade para que constatemos que o conjunto $Y_1, \cdots, Y_n$ é L.I., basta que verifiquemos que

$$W(Y_1, \cdots, Y_n) \neq 0$$

para algum $x_0 \in I$.

Mãos a obra

Decida se o conjunto de vetores $Y_1(x) = (\cos x\ \ e^{2x})^T, Y_2(x) = (\cos x\ \ sen\, 2x)^T$ é L.I. ou não.

Definição 13.3. (**Conjunto fundamental**)Um conjunto fundamental para o sistema homogêneo de ordem n (13.70) é um conjunto de n vetores solução de (13.70) L.I.

Teorema 13.4. *(***Solução geral***)Seja $Y_1, \cdots, Y_n$ um conjunto fundamental do sistema homogêneo (13.70) em I. Então, a solução geral do sistema homogêneo (13.70) no intervalo I é*

$$Y_c(x) = c_1 Y_1 + \cdots + c_n Y_n,$$

onde $c_1, \cdots, c_n$ são constantes quaisquer e, uma solução geral para o sistema não homogêneo (13.69) em I é dada por

$$Y(x) = Y_c(x) + Y_p(x) = c_1 Y_1 + \cdots + c_n Y_n + Y_p(x),$$

onde $Y_p(x)$ é uma solução particular do sistema não homogêneo (13.69) em I.

13.3 Sistemas de equações lineares de primeira ordem homogêneo com coeficientes constantes.

Lembremos que no exemplo anterior vimos que uma solução do sistema

$$Y' = AY,$$

onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ é dada por

$$Y = \begin{pmatrix} e^{-2x} \\ -e^{-2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2x} = Ke^{\lambda x},$$

onde $K = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\lambda = -2$. Podemos nos perguntar se toda solução será dessa forma. a resposta é sim.

Suponha que

$$Y = Ke^{\lambda x},$$

onde K é uma matriz de ordem $n \times 1$ com coeficientes constantes, seja solução do sistema homogêneo

$$Y' = AY, \tag{13.71}$$

onde $Y \in \mathbb{R}^n$ e A é uma matriz com coeficientes constantes de ordem $n \times n$. (De agora por diante usaremos a notação A para representar uma matriz com coeficientes constantes.) Assim,

$$Y' = AY \Leftrightarrow K\lambda e^{\lambda x} = AKe^{\lambda x} \Leftrightarrow (AK - \lambda K)e^{\lambda x} = 0.$$

(Por abuso de notação usaremos o símbolo 0 para denotarmos uma matriz nula.) Como $e^{\lambda x} \neq 0$ para todo x, podemos dividir a expressão acima por $e^{\lambda x}$ e obter

$$(AK - \lambda K) = 0 \Leftrightarrow (AK - \lambda IdK) = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda Id)K = 0,$$

onde Id é a matriz identidade.

Dessa maneira, para acharmos uma solução não trivial do sistema (13.71) da forma

$$Y = Ke^{\lambda x},$$

onde K não é a matriz nula, temos que resolver o sistema

$$(A - \lambda Id)K = 0. \qquad (13.72)$$

Da álgebra linear, sabemos que para o sistema homogêneo (13.72) ter solução não trivial é necessário que

$$det(A - \lambda Id) = 0, \qquad (13.73)$$

uma vez que se $det(A - \lambda Id) \neq 0$ segue que $A - \lambda Id$ possui matriz inversa, B, por exemplo e assim, $B(A - \lambda Id)K = IdK = 0$, portanto K seria a matriz nula.

A equação (13.73) é chamada **equação característica da matriz A**, suas soluções, λ, são os autovalores de A. Uma solução $K \neq 0$ de (13.72) correspondente ao autovalor λ é dita autovetor.

Na resolução de (13.73) examinaremos três casos: autovalores reais distintos, autovalores reais repetidos e autovalores complexos. Comecemos pelo primeiro caso.

Autovalores reais distintos.

Suponha qua a matriz A, de ordem $n \times n$, tenha n autovalores reais distintos $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, então um conjunto L.I. de autovetores $K_1, \cdots, K_n$ poderá sempre ser obtido e assim

$$Y_1 = K_1 e^{\lambda_1 x}, \cdots, Y_n = K_n e^{\lambda_n x}$$

será uma conjunto fundamental para o sistema (13.71) para $x \in (-\infty, \infty)$. Dessa maneira, a solução geral do sistema homogêneo (13.71) é dada por

$$Y_c(x) = c_1 K_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_n K_n e^{\lambda_n x}, x \in (-\infty, \infty).$$

Exemplo 13.3. Resolva o sistema homogêneo $Y' = AY$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pelo que foi exposto acima, precisamos achar os autovalores da matriz A. Assim, temos que resolver a equação

$$det(A - \lambda Id) = 0,$$

que´, neste caso, é dada por

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -3-\lambda & 0 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda+3)(\lambda+1)(\lambda-2) = 0.$$

Portanto, os autovalores da matriz A são reais e distintos, a saber, $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 2$. Então, usando um pouco de álgebra

linear, é possível mostrar que existe três correspondentes autovetores L.I., K_1, K_2 e K_3. Vamos encontrá-los?
Para $\lambda_1 = -3$, a equação $(A - \lambda_1 Id)K_1 = 0$ assume a forma

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

onde $K_1 = (\kappa_1\ \kappa_2\ \kappa_3)^T$. Assim, para encontrarmos o autovetor K_1, basta-nos resolver o sistema

$$3\kappa_1 + \kappa_3 = 0$$

$$2\kappa_1 + 2\kappa_2 + 4\kappa_3 = 0.$$

Com poucos cálculos achamos a solução $\kappa_1 = \kappa_1, \kappa_2 = 5\kappa_1, \kappa_3 = -3\kappa_1$, onde κ_1 é uma constante qualquer. Portanto, escolhendo $\kappa_1 = 1$, segue que o autovetor, K_1, correspondente ao autovalor $\lambda_1 = -3$ é dado por $K_1 = (1\ 5\ -3)^T$. De maneira análoga calculamos os outros dois autovetores K_2 e K_3, obtendo os valores $K_2 = (2\ 0\ -2)^T, K_3 = (1\ 0\ 2)^T$. Portanto, a solução geral do sistema dado é

$$Y_c(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-3x} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-x} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2x},$$

onde c_1, c_2, c_3 são constantes arbitrárias.

Autovalores reais repetidos

Suponha agora que a matriz A, de ordem $n \times n$, possui um autovalor, digamos, λ_1 com multiplicidade m, $m \leq n$. Neste caso, podemos ter duas situações:

1) Para algumas matrizes A é possível encontrar m autovetores L.I., $K_1, \cdots, K_m$ correspondentes ao autovalor λ_1. Nesse caso, a solução geral do sistema **contém** a combinação

$$c_1 K_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 K_2 e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_m K_m e^{\lambda_1 x}.$$

2)Para outras matrizas A podemos encontrar apenas um autovetor K_1 correspondente ao autovalor λ_1 de multiplicidade m. Neste caso, as m soluções L.I. são da forma

$$\begin{aligned}
Y_1 &= K_{11} e^{\lambda_1 x}\\
Y_2 &= K_{21} x e^{\lambda_1 x} + K_{22} e^{\lambda_1 x}\\
&\vdots\\
Y_m &= K_{m1} \tfrac{x^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda_1 x} + K_{m2} \tfrac{x^{m-2}}{(m-2)!} e^{\lambda_1 x} + \cdots + K_{mm} e^{\lambda_1 x},
\end{aligned} \tag{13.74}$$

onde K_{ij} são vetores de ordem $n \times 1$. Veremos como encontrar tais vetores no exemplo a seguir.

Exemplo 13.4. Resolva o sistema $Y' = AY$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo a equação característica $det(A - \lambda Id) = 0$, obtemos $(\lambda - 1)^3 = 0$. Assim, a matriz A possui um autovalor $\lambda_1 = 1$ com multiplicidade 3. Calculemos o autovetor associado.

Pelo que apresentamos anteriormente, para encontrar o autovetor, K_1, devemos resolver a equação

$$(A - \lambda_1 Id) K_1 = 0,$$

onde $K_1 = (\kappa_1\ \kappa_2\ \kappa_3)^T$. Dessa maneira, temos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou escrevendo de outra forma

$$2\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3 = 0$$

$$\kappa_2 - \kappa_3 = 0.$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos $\kappa_1 = 0, \kappa_2 = \kappa_2, \kappa_3 = \kappa_2$. Assim,

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \kappa_2$$

Note que obtemos apenas um autovetor associado a λ_1, a saber, qualquer um da forma $(0\ \kappa_2\ \kappa_2)^T$, onde κ_2 é uma constante arbitrária. Observe quaisquer dois autovetores nesse formato serão linearmente dependentes. Queremos aqui fazer uma pausa para a seguinte observação.

Observação 13.3. Suponha que temos um autovalor λ_1 com multiplicidade 2 e que temos achado, ao resolver o sistema, apenas, por exemplo, a seguinte relação $\kappa_1 - \kappa_2 + \kappa_3 = 0$. Com essa relação, a solução do sistema seria $\kappa_1 = \kappa_2 - \kappa_3, \kappa_2 = \kappa_2$ e $\kappa_3 = \kappa_3$. Dessa maneira, teríamos

$$K = \begin{pmatrix} \kappa_2 - \kappa_3 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \kappa_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \kappa_3$$

Portanto, o espaço dos autovetores associados a λ_1 é bidimensional e podemos encontrar dois autovetores L.I. associados ao autovalor

λ_1. Fazendo $\kappa_2 = 1$, $\kappa_3 = 0$ obtemos $K_1 = (1\ 1\ 0)^T$ e escolhendo $\kappa_2 = 0$, $\kappa_3 = 1$ obtemos $K_2 = (-1\ 0\ 1)^T$. Note que K_1, K_2 são vetores L.I.

Bom, voltando ao nosso exemplo, escolhendo $\kappa_2 = 1$, temos $K_1 = (0\ 1\ 1)^T$. Assim, uma solução para o sistema dado é

$$Y_1(x) = K_1 e^{\lambda_1 x} = K_1 e^x = (0, 1, 1)^T e^x.$$

Por (13.74), uma segunda solução, Y_2, L.I. com Y_1 tem a forma

$$Y_2 = K_1 x e^{\lambda_1 x} + K_2 e^{\lambda_1 x}.$$

Assim, substituindo essa expressão de Y_2 no sistema $Y' = AY$ e simplificando, obtemos

$$(AK_1 - \lambda_1 K_1) x e^{\lambda_1 x} + (AK_2 - \lambda_1 K_2 - K_1) e^{\lambda_1 x} = 0.$$

Como as funções $xe^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_1 x}$ são L.I. essa igualdade é válida quando

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 Id)K_1 &= 0 \\ (A - \lambda_1 Id)K_2 &= K_1. \end{aligned}$$

Assim, para encontrarmos a expressão de Y_2, basta-nos resolver a segunda equação do sistema acima e encontrar o valor de K_2. Seja $K_2 = (\kappa_1\ \kappa_2\ \kappa_3)^T$, então a segunda equação do sistema acima pode ser escrita da seguinte maneira

$$2\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3 = 1$$

$$\kappa_2 - \kappa_3 = 1.$$

A solução desse sistema é dada por $\kappa_1 = 0, \kappa_2 = \kappa_2, \kappa_3 = \kappa_2 - 1$. Assim, escolhendo $\kappa_2 = 5$, temos $K_2 = (0\ 5\ 4)^T$. Dessa maneira,

Y_2 é dada por

$$Y_2 = (0\ 1\ 1)^T xe^x + (0\ 5\ 4)^T e^x.$$

Agora vamos a terceira solução, Y_3, a qual por (13.74) é dada por

$$Y_3 = K_1 \frac{x^2}{2!} e^{\lambda_1 x} + K_2 x e^{\lambda_1 x} + K_3 e^{\lambda_1 x}.$$

Assim, derivando essa expressão de Y_3 e substituindo no sistema dado, encontramos o sistema

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 Id)K_1 &= 0 \\ (A - \lambda_1 Id)K_2 &= K_1 \\ (A - \lambda_1 Id)K_3 &= K_2. \end{aligned}$$

Assim, para acharmos a expressão de Y_3, basta-nos resolver a terceira equação do sistema acima, a qual pode ser escrita da seguinte maneira

$$2\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3 = 5$$

$$\kappa_2 - \kappa_3 = 4.$$

A solução do sistema acima é dada por $\kappa_1 = 1/2, \kappa_2 = \kappa_2, \kappa_3 = \kappa_2 - 4$. Assim, escolhendo $\kappa_2 = 0$, temos $K_3 = (\frac{1}{2}\ 0\ \ -4)^T$. Portanto,

$$Y_3 = (0\ 1\ 1)^T \frac{x^2}{2} e^x + (0\ 5\ 4)^T xe^x + (\frac{1}{2}\ 0\ \ -4)^T e^x.$$

Logo, a solução geral do sistema dado é

$$Y_c(x) = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3.$$

Observação 13.4. Caso o autovalor λ_1 tenha multiplicidade maior do que 3, a fórmula dada acima

$$\begin{aligned}(A-\lambda_1 Id)K_1 &= 0\\ (A-\lambda_1 Id)K_2 &= K_1\\ (A-\lambda_1 Id)K_3 &= K_2\end{aligned}$$

continua seguindo a mesma construção, ou seja, a próxima equação seria

$$(A-\lambda_1 Id)K_4 = K_3$$

e assim por diante.

Autovalores complexos

Se algum dos autovalores da matriz A de ordem $n \times n$ for complexo, digamos, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, sabemos que o seu conjugado,$\lambda_2 = \alpha - i\beta$, também será autovalor de A. Nesse caso, teremos o seguinte resultado

Teorema 13.5. *Seja A a matriz de coeficientes constantes reais de (13.71) e seja K_1 o autovetor correspondente ao autovalor complexo, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, da matriz A. Então,*

$$K_1 e^{\lambda_1 x} \text{ e } \overline{K}_1 e^{\overline{\lambda}_1 x},$$

onde $\overline{K}_1$ é a matriz conjugada de K_1, são soluções de (13.71).

Assim, pelo resultado acima, uma vez que a matriz A tenha autovalor complexo, esse autovalor contribuirá com uma combinação de funções complexas para a solução geral do sistema.

Analogamente ao que fizemos com equações lineares de primeira ordem quando se tinha raízes complexas, trabalharemos a parte

complexa da solução geral até obtermos uma versão que envolva apenas funções reais. Desse modo, observe que, usando a fórmula de Euler ($e^{i\theta} = \cos\theta + isen\,\theta$), temos

$$K_1 e^{\lambda_1 x} = K_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} = K_1 e^{\alpha x}[\cos\beta x + isen\,\beta x]$$

e

$$\overline{K}_1 e^{\overline{\lambda}_1 x} = \overline{K}_1 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = K_1 e^{\alpha x}[\cos\beta x - isen\,\beta x].$$

Pelo Teorema 13.2 segue que

$$Y_1 = \frac{1}{2}(K_1 e^{\lambda_1 x} + \overline{K}_1 e^{\overline{\lambda}_1 x})$$

e

$$Y_2 = \frac{i}{2}[-K_1 e^{\lambda_1 x} + \overline{K}_1 e^{\overline{\lambda}_1 x}]$$

são também soluções de (13.71), as quais são L.I. em $(-\infty, \infty)$. Usando a fórmula de Euler nas expressões de Y_1 e Y_2 acima, obtemos que

$$Y_1 = e^{\alpha x}[B_1 \cos\beta x - B_2 sen\,\beta x]$$

e

$$Y_2 = e^{\alpha x}[B_2 \cos\beta x + B_1 sen\,\beta x],$$

onde

$$B_1 = \frac{1}{2}[K_1 + \overline{K}_1], \;\; B_2 = \frac{i}{2}[-K_1 + \overline{K}_1].$$

Portanto, a solução geral de (13.71), neste caso, **contém** a combinação real de funções

$$c_1 e^{\alpha x}[B_1 \cos\beta x - B_2 sen\,\beta x] + c_2 e^{\alpha x}[B_2 \cos\beta x + B_1 sen\,\beta x].$$

13.4 Conclusão

Na aula de hoje, concluímos que os sistemas de equações lineares nos ajuda a resolver equações diferenciais lineares de ordem superior. Nessa aula foi apresentado o método de resolução de sistemas de equações lineares homogêneas com coeficientes constantes.

RESUMO

..

Na aula de hoje aprendemos como resolver um sistema de equações lineares homogêneo com coeficientes constantes. Vimos que tudo se resume a analisarmos as raízes de uma determinada equação, a qual é chamada equação característica da matriz associada ao sistema homogêneo. Nesse caso, podemos ter três opções: raízes reais distinats, raízes reais repetidas ou raízes complexas.

PRÓXIMA AULA

..

Em nossa próxima aula continuaremos a resolver sistemas de equações lineares de primeira ordem só que, desta vez, trataremos dos sistemas não homogêneos.

ATIVIDADES

..

Atividade. 13.1. Resolva o sistema

$$y_1' = ay_1 + by_2, \quad y_2' = by_1 + ay_2, a, b \in \mathbb{R}.$$

Atividade. 13.2. Resolva

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 10 \\ -4 & -2 & -4 \\ -7 & -5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Atividade. 13.3. Resolva o P.V.I.

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= 3x + 2y + 4z \\ \tfrac{dy}{dt} &= 2x + 2z \qquad , x(0) = 2, y(0) = 0, z(0) = 1. \\ \tfrac{dz}{dt} &= 4x + 2y + 3z \end{aligned}$$

Atividade. 13.4. Resolva

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 6x - y\\ \frac{dy}{dt} &= 5x + 2y.\end{aligned}$$

LEITURA COMPLEMENTAR

..

BRAUM, Martin, Differential Equations and their applications. Springer, 1992.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes, Equações Diferenciais Aplicadas. Coleção matemática universitária. IMPA, 2007.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.

13.5 Referências Bibliográficas

KREIDER, KULLER, OSTBERG, Equações Diferenciais, USP, 1972.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.